1 Glücksspiele

Würfel und Spielregel – sie sind
die Symbole für Zufall und Naturgesetz.
Manfred Eigen und Ruthild Winkler[1]

Die Wiege der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das Glücksspiel. Der Briefwechsel zwischen Blaise Pascal (1623-1663) und Pierre Fermat (1607-1665) im Jahre 1654 über zwei vom Chevalier De Méré angeregte Wahrscheinlichkeitsprobleme des Würfelspiels gilt gemeinhin als das Geburtsjahr. Das ist historisch gesehen nicht korrekt – bereits deutlich früher haben sich vor allem italienische Mathematiker, Naturforscher und spielbegeisterte Laien mit speziellen Aufgaben über Glücksspiele befasst; bis zum Ende des 16. Jahrhunderts wurden bereits elementare Grundlagen für die Berechnung von Wett- und Gewinnchancen gelegt. Besonders erwähnenswert: das 1525 von dem leidenschaftlichen Spieler, Arzt und Mathematiker Girolamo Cardano (1501-1576) verfasste „*Liber de ludo aleae*“ (Buch über Würfelspiele), das nach dem Tode des Verfassers 1576 im Nachlass aufgefunden wurde, aber erst 1663, ein Jahr nach Pascals Tod, in Lyon veröffentlicht wurde. Cardano hat offenbar als Erster den Quotienten aus der Anzahl der günstigen zur Anzahl aller möglichen Fälle verwendet, ohne freilich von Wahrscheinlichkeit zu sprechen.[2]

Der als Vater der modernen Naturwissenschaften gefeierte Galileo Galilei (1564-1642) hatte sich 1623 ebenfalls mit einer kleinen Schrift „*Sopra le scoperte dei dadi*“ (Über Entdeckungen zum Würfelspiel) zu Problemen des Spiels mit drei Würfeln zu Wort gemeldet. Er fand die korrekte Lösung, dass die Augensumme 10 durch 27 von insgesamt 216 verschiedenen Würfelergebnissen, die Augensumme 9 dagegen nur durch 25 von 216 Ergebnissen realisiert werden kann. Bemerkenswert ist, dass Galileo Galilei einen empirischen Bezug andeutet, nämlich dass Spieler festgestellt hätten, dass das Eintreten der Augensumme 10 etwas leichter zu erreichen sei.[3] Galileis Drei-Würfel-Ergebnisse hatte auch Cardano bereits gefunden.

Wie in der Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften nicht selten festzustellen, wurden wegweisende Theorien von zwei oder mehreren Personen unabhängig voneinander aufgestellt. Das Phänomen der unabhängigen Mehrfacherfindung wurde im Mittelalter, und noch Jahrhunderte darüber hinaus, durch zögerliche Veröffentlichung, unter anderem wegen der verbreiteten Geheimhaltung neuer Ergebnisse, und den oft schwierigen Zugang zu Veröffentlichungen gefördert. Das trifft auch auf die Anfänge der Wahrscheinlichkeitstheorie zu. Der holländische Mathematiker und Physiker Christiaan Huygens (1629-1695) hatte während seines Besuchs 1655 in Paris Kenntnis von den Würfelspielberechnungen Pascals und Fermats erhalten. Da diese ihre neuen Methoden aber streng geheim hielten, konnte er im Vorwort seiner Abhandlung mit Recht behaupten, dass er gezwungen war, den Gegenstand von den Grundlagen aufwärts selbst zu entwickeln. Die Abhandlung wurde 1657 von seinem Lehrer Frans van Schooten (1615-1660) aus dem Holländischen ins Lateinische übersetzt und erschien unter dem Titel „*De ratiociniis in ludo aleae*“ (Über die bei Glücksspielen möglichen Berechnungen). Huygens brachte im Vorwort seiner Abhandlung die Priorität von Pascal und Fermat zum Ausdruck – ein keineswegs selbstverständliches, nobles Verhalten.[4]

Mit Kommentaren und Lösungen versehen, wurde Huygens’ Abhandlung im ersten Teil von Jakob Bernoullis (1655-1705) berühmter „*Ars conjectandi*“ (Mutmaßungskunst) 1713 erneut veröffentlicht. Huygens’ systematisch aufgebaute Arbeit basiert auf einem intuitiv gebildeten Begriff der „expectatio“ (Hoffnung oder Erwartung) in einem „rechtmäßigen“, das heißt fairen Spiel. Seine Definition des Erwartungswertes entspricht nicht dem heute üblichen mathematischen Begriff, der den Begriff der Wahrscheinlichkeit voraussetzt; den modernen Begriff führte Abraham de Moivre (1667-1754) ein.[5] In den Aufgaben und Beispielen der Huygen’schen Abhandlung dreht sich alles um die Berechnung von Gewinnchancen in „Spielen, welche allein vom Glück entschieden werden“ und deren Ausgang ungewiss ist.

2 Die Kunst des Vermutens

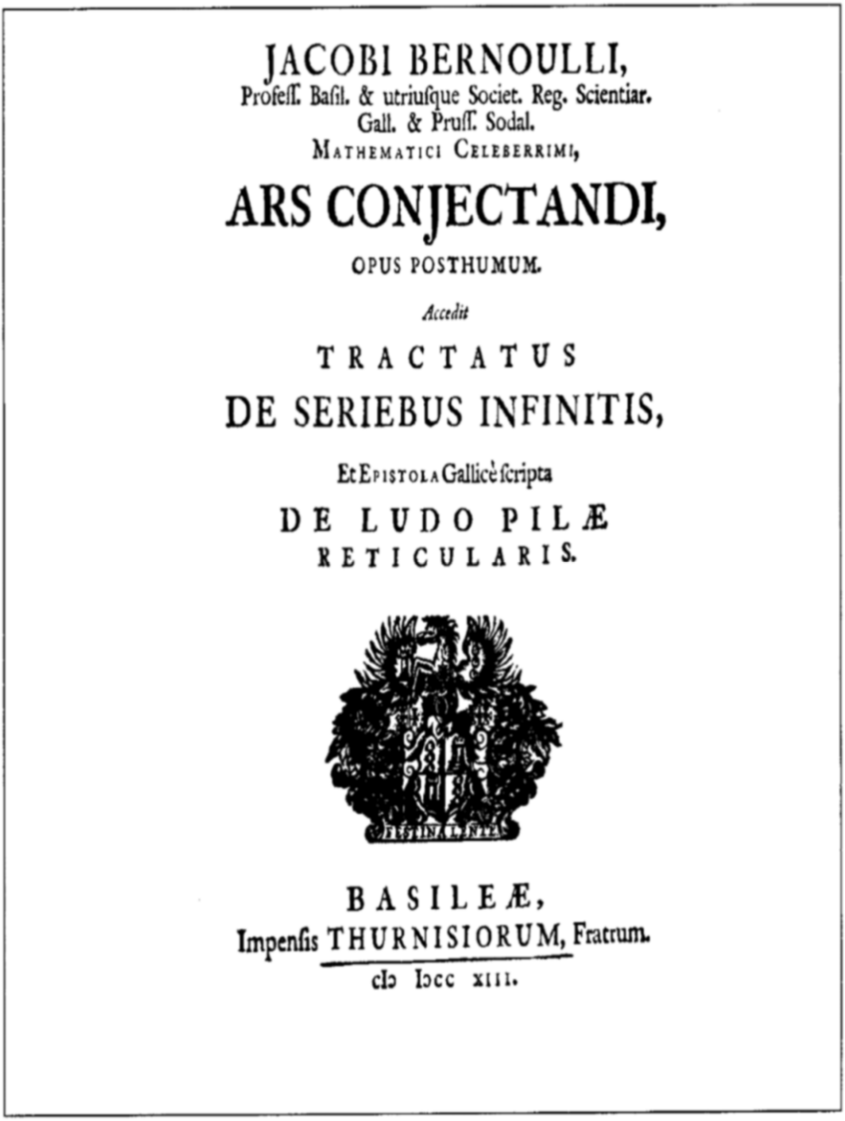
Das Gewebe dieser Welt ist aus
Notwendigkeit und Zufall gebildet.
Johann W. von Goethe[1]

Jakob Bernoulli

Pascal, Fermat und Huygens hatten keinen explizit definierten Begriff der Wahrscheinlichkeit gekannt. Dies war auch noch der Stand, als Jakob Bernoulli zwischen 1680 und 1685 seine Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung aufnahm.

Die „*Ars conjectandi sive stochastice*“, so der vollständige lateinische Titel, erschien 1713, acht Jahre nach dem Tod von Jakob Bernoulli in Basel. Diese Abhandlung erlangte ihre herausragende Bedeutung für die Entwicklung der mathematischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik vor allem durch die im Teil IV enthaltenen Ideen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff, zum Problem des statistischen Schließens (Inferenz) und, in ganz besonderem Maße, durch ein berühmtes Theorem, für welches Siméon-Denis Poisson (1781-1840) die Bezeichnung „Gesetz der großen Zahlen“ prägte.[2] Bernoulli kommunizierte 1703 seine Theorie mit Gottfried W. Leibniz (1646-1716), der verschiedene Einwände vorbrachte. Der schwer kranke Bernoulli ignorierte letztendlich Leibniz’ Bedenken, diskutierte aber die wesentlichen Einwände im Teil IV der „*Ars conjectandi*.“

Jakob Bernoulli hinterließ die „*Ars conjectandi*“ unvollendet. Das Werk wurde schließlich in der ursprünglichen Fassung gedruckt; Jakobs Bruder Johann und sein Neffe Nikolaus I. hatten die Aufforderung der Verleger, das Manuskript zu vollenden, abgelehnt. In deutscher Sprache erschien das klassische Werk erst knapp 200 Jahre nach der Erstveröffentlichung. Die spätere hohe Wertschätzung der „*Ars conjectandi*“ bestand offensichtlich nicht von Anfang an – in einer zweibändigen Aus-



JACOBI BERNOULLI,
Profeſſ. Baſil. & utriuſque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruſſ. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè ſcripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impenſis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↄ Iↄcc xiii.

ABBILDUNG 1: Titelblatt der Ars Conjectandi (1713). [3]

gabe der Abhandlungen Bernoullis aus dem Jahre 1744 wurde die „*Ars conjectandi*" nicht aufgenommen. Wer war dieser Mann, der die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf ein neues, fruchtbares Fundament stellte?

Jakob Bernoulli, geboren am 27. Dezember 1655 in Basel, war vor allem ein genialer Mathematiker. Zum Mathematiker wurde er, in dem er sich gegen den Willen des Vaters – und daher notgedrungen als Autodidakt – mit Mathematik und Astronomie befasste. Sein Studium der Philosophie schloss er 1671 mit einem Magistergrad, das der Theologie fünf Jahre später mit einem Lizentiat ab. Aber seine große Passion, die er mit mehreren Bernoullis der berühmten Baseler Gelehrten-Familie teilte, waren die Mathematik und angrenzende Gebiete. Mit seinem zwölf Jahre jüngeren Bruder Johann, den er unterrichtete und der ihm 1705 auf den Baseler Lehrstuhl der Mathematik nachfolgte, trug er wesentlich zur Ausgestaltung der Leibniz'schen Infinitesimalrechnung bei. Jakob Bernoulli initiierte Untersuchungen zur Variationsrechnung, die später von Leonhard Euler (1707-1783) und Joseph L. Lagrange (1736-1813) weiterentwickelt zu großer Bedeutung gelangte, und gilt als Begründer der Methode der vollständigen Induktion und der mathematischen Statistik. Letzteres vor allem durch seine Ideen zur Inferenz und sein bahnbrechendes „goldenes Theorem".[4]

Wahrscheinlichkeit, Zufall und Notwendigkeit

Anfang des 18. Jahrhundert gab es noch keine Zersplitterung in Fachdisziplinen. So ist es nicht verwunderlich, dass in dem bei Weitem bedeutendsten, vierten Teil der „*Ars conjectandi*" allgemeine Betrachtungen und Feststellungen über Unsicherheit von Wissen und Erkenntnis, Notwendigkeit und Zufälligkeit, aber auch über das Beurteilen von juristischen Sachverhalten sowie Entscheiden und Handeln unter Unsicherheit weiten Raum einnehmen. Tatsächlich sind vier der insgesamt fünf Kapitel des vierten Teils nicht-mathematischer Natur. Um einen

Eindruck von der Originalität der Darlegungen zu vermitteln, werden nachfolgend mehrere Passagen zitiert.

Begriffe bilden das Rückgrat einer Theorie. Gleich im ersten Kapitel überrascht Bernoulli mit einer Definition des Begriffes Wahrscheinlichkeit:

> Die Wahrscheinlichkeit ist nämlich ein Grad der Gewissheit und unterscheidet sich von ihr wie ein Theil vom Ganzen.[5]

Die Grade der Gewissheit, und damit die Wahrscheinlichkeitswerte, bewegen sich zwischen 0 und 1, wobei der absoluten Gewissheit 1 zugeordnet wird. Dies ist ersichtlich die Definition eines subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Sie ist indessen keineswegs neu, sondern wurde schon von Leibniz in früheren Schriften kommuniziert.[6] Neu dagegen ist die explizite Angabe eines Wahrscheinlichkeitsbegriffs in einem Werk, das sich mit der mathematischen Behandlung ungewisser Ereignisse und Aussagen befasst. Wie die spätere Entwicklung zeigt, sind subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriffe heute noch vertretbare Interpretationen der mathematischen Wahrscheinlichkeit.

Nach der Begriffsbestimmung der Wahrscheinlichkeit behandelt Bernoulli die Modalitäten „möglich“, „unmöglich“ und „moralisch gewiss“:

> Möglich ist das, was einen, wenn auch sehr kleinen Theil der Gewissheit für sich hat; unmöglich ist dagegen das, was keinen oder einen unendlich kleinen Theil der Gewissheit besitzt (…) Moralisch gewiss ist etwas, dessen Wahrscheinlichkeit nahezu der vollen Gewissheit gleichkommt (…)[7]

Auch der Begriff der moralischen Gewissheit wurde bereits von Leibniz und anderen benutzt. Heute wird „moralische Gewissheit“ als „praktische Sicherheit“ bezeichnet. Zufälligkeit und Notwendigkeit werden von Bernoulli als Gegensatzpaar behandelt. Zum Begriff der Notwendigkeit führt er aus:

> Nothwendig ist das, was sein, werden oder gewesen sein muss (…) dass das Dreieck drei Winkel besitzt, deren Summe gleich zwei Rechten ist (…)[8]

Aber Bernoulli sieht den Gegensatz von Notwendigkeit und Zufälligkeit nicht als absolut an:

> (…) nicht immer schliesst die Zufälligkeit die Nothwendigkeit bis zu Ursachen von untergeordneter Bedeutung ganz aus (…)[9]

Was Bernoulli dann dazu in aller Kürze anführt, ist verblüffend: Er skizziert die Grundideen der Physik zufälliger Ereignisse anhand des Würfels und des zukünftigen Wetters. Zwei volle Jahrhunderte werden noch verstreichen, bis Henri Poincaré (1854-1912) und Marian W. von Smoluchowski (1872-1917) hierzu vertiefte Einsichten präsentieren. Bernoulli fasst seine Betrachtungen mit den folgenden Worten zusammen:

> Daraus folgt, dass einem Menschen und zu einer bestimmten Zeit etwas als zufällig erscheinen kann, was einem andern Menschen (ja sogar auch demselben) zu einer andern Zeit, nachdem die Ursachen davon erkannt sind, als nothwendig erscheint. Daher hängt die Zufälligkeit vornehmlich auch von unserer Erkenntnis ab (…)[10]

Jakob Bernoulli vertritt auch hier eine subjektive Position: Zufälligkeit beruht auf unzureichender Kenntnis der Ursachen. Das Kausalitätsprinzip und die Determiniertheit aller Ereignisse anzuzweifeln, liegt ihm fern – letztendlich ist jegliches Geschehen vollkommen bestimmt. Ein Jahrhundert später wird uns dieses deterministische Weltbild bei Pierre-Simon Laplace (1749-1827) in vollendeter Form wiederbegegnen. Diese weltanschauliche Position ist ein Spiegel des festen Glaubens an eine durchgehende Kausalität und kosmische Ordnung, wie sie bereits die von Zenon von Kition (um 333-264 v. Chr.) begründete antike Stoà vertrat. Das Paradigma der universellen Determiniertheit des Natur-